

Mehrschichtige Verbundkonstruktionen unter Anpralllasten

Rudolf Heuer

Zentrum für Allgemeine Mechanik und Baudynamik, TU Wien, Österreich

ZUSAMMENFASSUNG: Mehrschichtige Verbundkonstruktionen repräsentieren wichtige Komponenten des Leichtbaus, da sie sich durch geringes Gewicht und hohe Steifigkeit auszeichnen. Durch gezielte Kombination unterschiedlicher Materialien können laminierte Bauteile und Sandwichkonstruktionen entsprechend den bauphysikalischen und mechanischen Anforderungen hergestellt werden. Die vorliegende Arbeit stellt ingenieurmäßige mechanischen Modellierungen von balken- und plattenartigen Verbundkonstruktionen unter dynamischen Lasten vor, wobei besonderes Augenmerk auf die globale Reaktion zufolge stoßartiger Einwirkungen gelegt wird.

1. EINLEITUNG

Das mechanische Verhalten von mehrschichtigen Verbundelementen hängt sehr stark von der gewählten Materialkombination ab. Deshalb müssen bei der Formulierung des zugeordneten Anfangs- Randwertproblems im ersten Schritt vor allem die Querschnittsdeformationen qualitativ genau abgeschätzt werden. Grundsätzlich kann zwischen zwei verschiedenen Verbundklassen unterschieden werden:

- Schichtverbunde (Laminates) sind aus einer Vielzahl von dünnen Schichten aufgebaut, deren Steifigkeiten sich in ähnlichen Wertebereichen befinden (Sun & Whitney, 1973, Irschik, 1993, Heuer, 1994)
- Sandwichverbunde bestehen aus einer leichten, schubsteifen und mäßig dicken Kernschicht, der an Ober- und Unterseite von zwei meist dünnen, hoch beanspruchbaren dehnsteifen Deckschichten begrenzt wird (Plantema, 1966, Stamm & Witte, 1974, Gordaninejad & Bert, 1989).

In beiden Klassen ist es jedoch möglich, nach Definition von effektiven Parametern des Materials und der beschreibenden kinematischen Größen, die zugehörigen Bewegungsgleichungen in Form von homogenisierten Konstruktionen zu formulieren; siehe z.B. Jones & Klein (1968) und Heuer & Irschik (1990, 1991).

Im gegenständlichen Fall von Anpralllasten wirken "große Kräfte" auf das Tragwerk während sehr "kurzer Zeit" ein. Der Impulsaustausch führt zu einer raschen Änderung des Geschwindigkeitszustandes. Eine genaue Untersuchung der dabei auftretenden mechanischen Vorgängen (Wellenausbreitung, inelastische Deformationen, etc.) zeigt, dass eine quantitative Beschreibung – falls überhaupt möglich – äußerst komplex und schwierig ist (Stronge, 2000, Harris & Piersol, 2002). Deswegen wird im Rahmen einer ingenieurmäßigen Modellierung folgende mechanische Idealisierung vorgeschlagen, siehe Ziegler (1998):

Die Beschleunigungen, Stoßkräfte und Spannungen werden unendlich groß, während des Stoßzeitpunktes bleibt jedoch die Lage der stoßenden Körper unverändert. Weiters werden nur die beiden Grenzfälle des "vollkommen elastischen" und "vollkommen unelastischen" Stoßes betrachtet. Nach energetisch konsistenter Annahme der Geschwindigkeitsverteilung im Tragwerk wird ihre Intensität "nach" dem Stoß ermittelt. Daraus kann schließlich, nach Lösung eines inhomogenen Anfangswertproblems, die maximale globale dynamische Beanspruchung in der Verbundkonstruktion "sicher" abgeschätzt werden.

2. MECHANISCHE MODELLE FÜR MEHRSCHICHTIGE VERBUNDKONSTRUKTIONEN

2.1 SCHICHTVERBUNDE (LAMINATE)

Für Schichtverbunde kann in den meisten Fällen ein kontinuierlicher Verlauf der Querschnittsdeformation über die gesamte Bauteildicke angenommen werden. Im folgenden werden die beschreibenden Gleichungen für mehrschichtige Laminates unter Berücksichtigung der Schubdeformation nach Timoshenko (Weaver et al., 1990) bzw. Mindlin (1951) hergeleitet. In dieser bezeichneten "schubelastischen Theorie ersten Grades" werden die Querschnitte im verformten Zustand noch immer eben angenommen, jedoch ist die Normalenhypothese nach Bernoulli nicht mehr erfüllt.

2.1.1 EBENE BALKENBIEGUNG

Abb. 1 zeigt exemplarisch einen dreischichtigen Balken mit zugehöriger Querschnittsdeformation mit dem Koordinatenursprung O im elastischen Schwerpunkt.

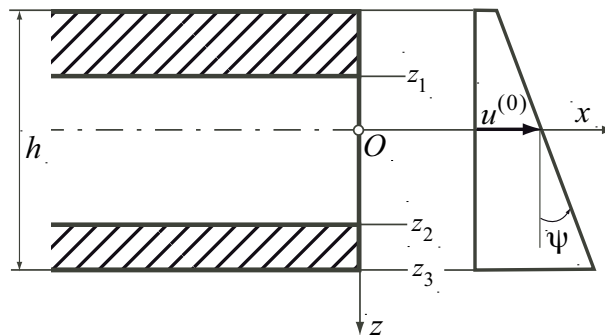


Abbildung 1. Geometrie und Querschnittsdeformation eines dreischichtigen Laminates nach schubelastischer Theorie ersten Grades

Für den Fall der ebenen Biegung lautet der Deformationsvektor

$$\begin{pmatrix} u(x, z; t) \\ v(x, z; t) \\ w(x, z; t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(0)}(x; t) + z \psi(x; t) \\ 0 \\ w(x; t) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

und damit die linearisierten Verzerrungen

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{(0)} + z \psi_{,x} \\ w_{,x} + \psi \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(0)} = u_{,x}^{(0)}. \quad (2)$$

Die linear elastischen konstitutiven Beziehungen liefern die Normal- und Schubspannungsverteilungen im Balkenquerschnitt,

$$\begin{pmatrix} \sigma(x, z; t) \\ \tau(x, z; t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(x, z) \varepsilon(x, z; t) \\ G(x, z) \gamma(x, z; t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(\varepsilon_0 + z \psi_{,x}) \\ G(w_{,x} + \psi) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

wobei Elastizitäts- und Schubmodul (E, G) zeitunabhängig angenommen werden. Die zugehörigen Schnittgrößen berechnen sich aus entsprechenden Integrationen über den Balkenquerschnitt zu

$$\begin{pmatrix} N \\ M \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_A \sigma dA \\ \int_A \sigma z dA \\ \int_A \tau dA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_A E[\varepsilon_0 + z \psi_{,x}] dA \\ \int_A E[\varepsilon_0 + z \psi_{,x}] z dA \\ \int_A G \gamma dA \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \psi_{,x} \\ w_{,x} + \psi \end{pmatrix}, \quad (4)$$

mit den effektiven Dehn- und Biegesteifigkeiten des kompositen Balkens

$$D = \int_A E dA, \quad B = \int_A E z^2 dA. \quad (5)$$

Die mit S bezeichnete Schubsteifigkeit errechnet sich aus dem Konzept der äquivalenten Deformationsarbeit von Querkraft und Schubspannungsverteilung, siehe z.B. Gordaninejad & Bert (1989),

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{B^2} \int_h \frac{1}{G(z) b(z)} \left[\int_z^{z_u} E(\chi) \chi b(\chi) d\chi \right]^2 dz. \quad (6)$$

Bei Vernachlässigung der rotatorischen und axialen Trägheitsterme liefern der Impulssatz (in Querrichtung) sowie die Momentengleichgewichtsbedingung zwei gekoppelte Bewegungsgleichungen für die beiden Deformationsfunktionen $w(x; t)$, $\psi(x; t)$ gemäß "Theorie 2. Ordnung",

$$S(\psi_{,x} + w_{,xx}) + N w_{,xx} + p = \mu \ddot{w}, \quad (7)$$

$$B \psi_{,xx} - S(\psi + w_{,x}) = 0. \quad (8)$$

$p = p(x;t)$ bezeichnet die verteilte äußere Querbewlastung, $N = const.$ eine äußere Normalkraft, und die Massenverteilung ist durch

$$\mu = \int_A \rho dA, \quad (9)$$

mit Massendichte $\rho(x,z)$ gegeben. Durch gezielte Elimination der Querschnittsrotation ψ kann auch eine einzelne Differentialgleichung für die Durchbiegung gefunden werden,

$$B \left(1 + \frac{N}{S} \right) w_{,xxxx} - N w_{,xx} + \mu \ddot{w} - \frac{\mu B}{S} \ddot{w}_{,xx} = p - \frac{B}{S} p_{,xx}. \quad (10)$$

Gemeinsam mit der Vorgabe von Anfangs- und Randbedingungen ist damit das dynamische Randwertproblem des mehrschichtigen Balkens definiert.

2.1.2 SYMMETRISCH GESCHICHTETE PLATTEN UND FLACHE SCHALEN

Die Bewegungsgleichung für die Durchbiegung ebener N -schichtiger Laminatplatten lassen sich in analoger Weise zum Biegebalken herleiten (Heuer, 1994); sie ist von der Form

$$K \left(1 + \frac{n}{S} \right) \Delta \Delta w - n \Delta w + \mu \ddot{w} - \frac{\mu K}{S} \Delta \ddot{w} = p - \frac{K}{S} \Delta p, \quad (11)$$

wobei

$$K = \sum_{k=1}^N K_k = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{E_k z^2}{(1-\nu_k^2)} dz, \quad S = \kappa^2 \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} G_k dz \quad (12)$$

die effektive Biege- und Schubsteifigkeit der mehrschichtigen Platte mit dem Schubfaktor κ^2 nach Mindlin (1951) darstellen. $n = const.$ repräsentiert eine mittlere Normalkraft, die in der Plattenebene wirkt.

Für den Fall von flachen Schalen (Plattentragwerke mit schwacher Vorkrümmung) gilt folgende modifizierte Bewegungsgleichung:

$$K \left(1 + \frac{n}{S} \right) \Delta \Delta w - n \left[\Delta w - 2 \left(H - \frac{K}{S} \Delta H \right) \right] + \mu \ddot{w} - \frac{\mu K}{S} \Delta \ddot{w} = p - \frac{K}{S} \Delta p. \quad (13)$$

Darin stellt H die mittlere Krümmung der Schalenmittelfläche dar,

$$H = \frac{1}{2} (k_x + k_y). \quad (14)$$

2.2 SANDWICHVERBUNDE

Im Gegensatz zu Laminaten muss für Sandwichtragwerke ein schichtweiser Deformationsansatz gewählt werden, siehe Abb. 2.

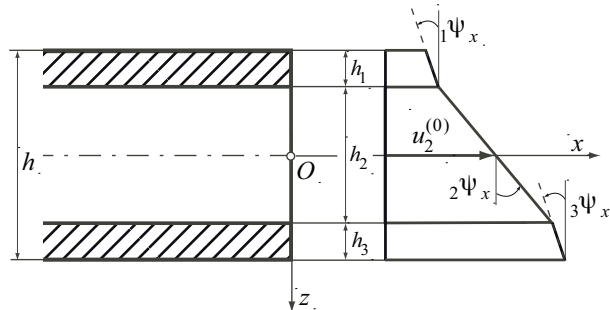


Abbildung 2. Geometrie und axiale Deformation eines Sandwichquerschnittes mit mäßig dicken Deckschichten

Im Rahmen der klassischen Sandwichtheorie werden die Deckschichten dünn und schubstarr angenommen. Der Kern hingegen überträgt nur Schubspannungen, und der gesamte Sandwichverbund reagiert als schubelastisches Element in homogenisierter Form. Daher sind die beschreibenden Bewegungsgleichungen wieder von der Form Gl. (10), (11) oder (13).

Falls jedoch die Deckschichten aufgrund größerer Dicke ebenfalls schubelastisch reagieren oder / und der Kern aufgrund erhöhter Steifigkeit auch Normalspannungen überträgt, wird das zugehörige Anfangs- Randwertproblem weitaus komplexer (Yu, 1959, Reddy, 1993). Allerdings gelingt es durch Definition einer effektiven Querschnittsrotation, die Bewegungsgleichung der Biegedeformation und alle kinematischen und dynamischen Größen wieder in die Form einer effektiven homogenisierten Struktur zu bringen. Ausführliche Herleitungen dazu sind in z.B. Heuer (1992) und Adam & Heuer (2003) zu finden.

3. DISKRETISIERUNG DER VERBUNDKONSTRUKTION

Im Falle von komplizierten Geometrien und / oder Randbedingungen ist eine Lösung des beschriebenen Problems nur näherungsweise möglich. Im ersten Schritt der Diskretisierung müssen die Eigenfunktionen und Eigenwerte des ungedämpften Systems bestimmt werden, das im Allgemeinen mit Hilfe numerischer Methoden, z.B. FEM oder BEM, geschieht. Danach wird die Durchbiegungsfunktion nach einer endlichen Anzahl von Eigenfunktionen entwickelt,

$$w(x;t) \approx w^*(x;t) = \sum_{k=1}^N q_k(t) \varphi_k(x). \quad (15)$$

Dabei bezeichnen $q_k(t)$ unbestimmte Lagekoordinaten und $\varphi_k(x)$ die Eigenfunktionen der betrachteten Struktur. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die entsprechende Differentialgleichung der Verbundkonstruktion entsteht ein "Fehler", der als fiktive Belas-

tung p^* gedeutet wird. Gemäß der Galerkinschen Vorschrift wird verlangt, dass die virtuelle Arbeit dieser Fehlerlast im integralen Mittel verschwindet,

$$\int_l p^* \delta w^* dx = 0, \quad (16)$$

mit

$$\delta w^*(x;t) = \sum_{k=1}^N \delta q_k(t) \varphi_k(x). \quad (17)$$

Für den Verbundbalken z.B. lautet diese fiktive Last:

$$p^* = \left[B \left(1 + \frac{N}{S} \right) w^*{}_{,xxxx} - N w^*{}_{,xx} + \mu \ddot{w}^* - \frac{\mu B}{S} \ddot{w}^*{}_{,xx} - p + \frac{B}{S} p_{,xx} \right]. \quad (18)$$

Nach Auswertung der Integrale erhält man aus der Forderung der Unabhängigkeit der Variation der Lagekoordinaten ein gewöhnliches entkoppeltes Differentialgleichungssystem für die unbekanntenen Lagekoordinaten,

$$\mathbf{M} \ddot{\vec{q}}(t) + \mathbf{K} \vec{q}(t) = \vec{f}(t). \quad (19)$$

\mathbf{M} und \mathbf{K} sind dabei Massen- und Steifigkeitsmatrix, die aufgrund der orthogonalen Eigenfunktionen Diagonalform aufweisen. $\vec{f}(t)$ stellt den Vektor der generalisierten Belastung und $\vec{q}(t)$ jenen der modalen Koordinaten dar. Nach Division durch die modalen Massen,

$$m_k = \int_l \mu \left[\varphi_k - \frac{B}{S} \varphi_k{}_{,xx} \right] \varphi_k dx, \quad (20)$$

und nachträglicher Berücksichtigung einer modalen Dämpfung ζ_k lautet schließlich das Gleichungssystem

$$\ddot{q}_k(t) + 2\zeta_k \omega_k \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \frac{1}{m_k} f_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (21)$$

mit den Komponenten des modalen Kraftvektors,

$$f_k = \int_l \left[p - \frac{B}{S} p_{,xx} \right] \varphi_k dx, \quad (22)$$

und den Eigenkreisfrequenzen der ungedämpften Struktur ω_k .

4. MODELLIERUNG DES ANPRALLVORGANGES

Da bei Baukonstruktionen Anpralllasten meist im Rahmen von Katastrophen- oder Sonderlastfällen auftreten, sind der genaue Vorgang und die übertragene Kraft während des auftretenden Stoßes nicht bekannt. Um trotzdem die dynamischen Beanspruchung in sicherer Weise abschätzen zu können, wird folgende ingenieurmäßige Vorgangsweise getroffen:

Die Anpralllast wird durch eine mit Geschwindigkeit \bar{v}_1 auf die Verbundkonstruktion auftreffende (generalisierte) Punktmasse \bar{m}_1 verursacht. Die für die Nachfolgebewegung maßgebende Geschwindigkeitskomponente ist quer zur Stabachse bzw. zur Plattenmittelebene orientiert, $v_1 = \bar{v}_1 \cdot \vec{e}_n$. Anstelle der Stoßkraft wird der Geschwindigkeitszustand der Konstruktion nach dem Stoß, $v'(x)$, ermittelt. Die Lösung des daraus resultierenden inhomogenen Anfangswertproblems liefert die maximale Deformation und Beanspruchung des Tragwerkes.

Bevor nun die Verbundkonstruktion unter einem Querstoß näher betrachtet wird, sollen die Grundgleichungen des "zentrischen Stoßes" zweier Punktmassen zusammengefasst werden (siehe dazu Hahn, 1992). Im Rahmen idealisierter Annahmen werden dabei die Beschleunigungen, Stoßkräfte und Spannungen unendlich groß, während des Stoßzeitpunktes bleibt jedoch die Lage der stoßenden Körper unverändert.

Führen zwei starre Punktmassen \bar{m}_1, \bar{m}_2 einen zentrischen Stoß gegeneinander aus, so errechnen sich die Geschwindigkeitskomponenten unmittelbar nach dem Stoß in Stoßnormalenrichtung

$$v_1' = \frac{(\mu - \beta)v_1 + (1 + \beta)v_2}{1 + \mu}, \quad v_2' = \frac{\mu(1 + \beta)v_1 + (1 - \beta\mu)v_2}{1 + \mu}, \quad \mu = \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_2}. \quad (23)$$

Der dabei entstehende Energieverlust wird

$$\Delta T = T - T' = \frac{(1 - \beta^2)}{2} \frac{\bar{m}_1}{1 + \mu} (v_1 - v_2)^2. \quad (24)$$

v_1 und v_2 sind die Geschwindigkeitskomponenten unmittelbar vor dem Stoß, β ist die Stoßzahl gemäß der Stoßhypothese von Newton (Hahn, 1992). Da letztere im Allgemeinen bei Anpralllasten nicht bekannt ist, werden im Weiteren nur die beiden Grenzfälle "vollkommen elastischer Stoß ($\beta = 1$)" und "vollkommen unelastischer Stoß ($\beta = 0$)" betrachtet. Außerdem sei berücksichtigt, dass für den Anprall $v_2 = 0$ gilt und somit

$$v_2' = \frac{\mu(1 + \beta)}{1 + \mu} v_1, \quad \Delta T = \frac{(1 - \beta^2)}{2} \frac{\bar{m}_1}{1 + \mu} v_1^2. \quad (25)$$

Trifft nun eine Punktmasse \bar{m}_1 mit der Geschwindigkeitskomponente v_1 (in Normalenrichtung) auf ein System mit mehreren Freiheitsgraden, können generell zwei Fälle unterschieden werden:

- die Geschwindigkeitsverteilung unmittelbar nach dem Stoß verläuft näherungsweise affin zur j -ten Eigenform $\varphi_j(x)$
- mehrere Freiheitsgrade beeinflussen den Geschwindigkeitszustand in der Konstruktion nach dem Stoß

Im ersten Fall gilt:

$$v_2' = \frac{\mu(1+\beta)}{1+\mu} v_1, \quad \mu = \bar{m}_1 / m_j, \quad (26)$$

$$w(x=a; t=0) = \dot{q}_{j0} \varphi_j(x=a) = v_2', \quad (27)$$

wobei $x=a$ die Auftreffstelle der anprallenden Masse \bar{m}_1 bezeichnet. Das Anfangswertproblem wird damit

$$\ddot{q}_k(t) + 2\zeta_k \omega_k \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (28)$$

$$AB: \dot{\vec{q}}(t=0) = \dot{\vec{q}}_0 = \left\{ 0 \quad 0 \quad \dots \quad \left[v_2' / \varphi_j(x=a) \right] \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right\}^T. \quad (29)$$

Seine Lösung lautet

$$q_k(t) = \begin{cases} \frac{v_2'}{\varphi_k(x=a)} \frac{e^{-\zeta_k \omega_k t}}{\omega_{kD}} \sin \omega_{kD} t \quad \dots \quad k = j \\ 0 \quad \dots \quad k \neq j \end{cases}, \quad \omega_{kD} = \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}, \quad (30)$$

und damit schließlich die maximale Deformation (erste Umkehrlage unter Vernachlässigung der Dämpfung)

$$w_{\max}(x) = \varphi_j(x) \frac{v_2'}{\varphi_j(x=a)} \frac{1}{\omega_j}. \quad (31)$$

Hier sei angemerkt, dass im Falle eines unelastischen Stoßes ($\beta = 0$) die Eigenkreisfrequenz ω_j reduziert werden muss,

$$\omega_j^* = \sqrt{\frac{1}{1+\mu}} \omega_j. \quad (32)$$

Aus Sicherheitsgründen wird nämlich angenommen, dass die auftreffende Masse während der ersten Nachfolgebewegung am System haftet und somit die Eigenfrequenz der angeregten Eigenform verringert.

Falls erforderlich kann in einem weiteren Berechnungsschritt eine $w_{\max}(x)$ zugehörige quasistatische Stoßkraft, wirkend an der Stelle $x = a$, ermittelt werden, um damit weitere maximale Kraftgrößen in der Konstruktion abzuschätzen.

Beeinflussen mehrere Freiheitsgrade die Geschwindigkeitsverteilung in der Verbundkonstruktion, so kann der Anfangsgeschwindigkeitszustand nicht mehr aus der einfachen Beziehung gemäß Gl. (25) berechnet werden. In diesem Fall muss die Geschwindigkeitsverteilung unmittelbar nach dem Anprall z.B. mit Hilfe der Lagrange'schen Stoßgleichungen (Ziegler, 1998) ermittelt werden. Als Resultat erhält man den zu Gl. (28) gehörenden Vektor der Anfangsgeschwindigkeiten in allgemeiner Form

$$AB: \dot{q}(t=0) = \dot{q}_0 = \{ \dot{q}_{10} \quad \dot{q}_{20} \quad \dots \quad \dot{q}_{N0} \}^T. \quad (33)$$

Die maximale Biegedeformation folgt aus der Überlagerung

$$w_{\max}(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x) \frac{\dot{q}_{k0}}{\omega_k}. \quad (34)$$

Für den Grenzfall des vollkommen unelastischen Stoßes sind die Eigenfrequenzen wieder zu reduzieren, indem die Eigenwerte der freien Schwingungen der Konstruktion mit zusätzlicher Anprallmasse berechnet werden.

5. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Da sich der genaue Kraftverlauf von Anpralllasten nur ungenau und damit für die Konstruktion unsicher bestimmen lässt, werden für die beiden Grenzfälle "vollkommen elastischer" und "vollkommen unelastischer" Stoß die Geschwindigkeitsverteilungen mechanisch konsistent abgeschätzt. Diese inhomogenen Anfangsbedingungen bestimmen die Nachfolgebewegung der betrachteten Verbundkonstruktion. Im Falle des vollkommen elastischen Stoßes nehmen die Geschwindigkeitskomponenten in der Konstruktion Maximalwerte an. Andererseits entsteht beim unelastischen Stoß eine dynamische Vergrößerung in der Schwingungsantwort, da die Eigenkreisfrequenz(en) aufgrund der anprallenden und haftend angenommenen Masse reduziert werden. Aus Gründen der Sicherheit sollten deswegen beide Grenzfälle berechnet werden.

SCHRIFTENVERZEICHNIS

- Adam C., Heuer, R., 2003. Thermally Induced Moderately Large Vibrations of Layered Plates, in L. Librescu and P. Marzocca (eds.), Proc. 5. Int. Congress on Thermal Stresses and Related Topics, June 8-11, 2003, Blacksburg, VA, USA, vol. 1, S. MA-3-3-1 – MA-3-3-4.
- Gordaninejad, F., Bert, C.W., 1989. A New Theory for Bending of Thick Sandwich Beams, Int. J. Mech. Sci. 31, S. 925 - 934.

- Hahn, H.G., 1992. Technische Mechanik fester Körper, 2. Auflage, Hanser Verlag, München.
- Harris, C.M., Piersol, A.G., 2002. Harris' Shock and Vibration Handbook, 5th Edition, McGraw-Hill, New York.
- Heuer, R., 1992. Static and Dynamic Analysis of Transversely Isotropic, Moderately Thick Sandwich Beams by Analogy, *Acta Mechanica* 91, S. 1 – 9.
- Heuer, R., 1994. Large Flexural Vibrations of Thermally Stressed Layered Shallow Shells, *Nonlinear Dynamics* 5, S. 25 – 38.
- Heuer, R., 2004. A Correspondence for the Analysis of Sandwich Beams With or Without Interlayer Slip, *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 11, S. 425 – 432.
- Heuer, R., Irschik, H., 1990. Eine Analogie zwischen Membran und Sandwichplatte mit "dicken" Deckschichten, *ZAMM* 68, S. T41 - T43.
- Heuer, R., Irschik, H., 1991. Erzwungene Schwingungen elastischer Sandwichplatten mit dicken Deckschichten, *ZAMM* 71, S.T86 - T88.
- Irschik, H., 1993. On Vibrations of Layered Beams and Plates, *ZAMM* 73, S. T34 - T45.
- Jones, R.M., Klein, S., 1968. Equivalence Between Single-layered and Certain Multi-layered Shells, *AIAA Journal* 6, S. 2295-2300.
- Mindlin, R.D., 1951. Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, *J. Appl. Mech.* 18, S. 31 - 38.
- Plantema, F.J., 1966. Sandwich Construction, John Wiley, New York.
- Reddy, J.N., 1993. An Evaluation of Equivalent-Single-Layer and Layerwise Theories of Composite Laminates, *Comp. Struct.* 25, S. 21 - 35.
- Stamm, K., Witte, H., 1974. Sandwichkonstruktionen, Springer-Verlag, Wien New York.
- Stronge, W.J., 2000. Impact Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge.
- Sun, C.-T., Whitney, J.M., 1973. Theories for the Dynamic Response of Laminated Plates, *AIAA J.* 11, S. 178 - 183.
- Weaver, W., Timoshenko, S.P., Young, D.H., 1990. Vibration Problems in Engineering, 5th Edition, Wiley, New York.
- Yu, Y.-Y., 1959. A New Theory of Elastic Sandwich Plates – One-Dimensional Case, *J. Appl. Mech.*, 26, S. 415 – 421.
- Ziegler, F., 1998. Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper, 3. Auflage, Springer-Verlag, Wien New York.